

Introducción al Álgebra (12-1)

Control 4

Punto Problema 1

Sea $m \in \mathbb{N}$, se define $\forall j \in \mathbb{N}$ $S_j = \sum_{k=0}^m k^j$

a) Demostrar que $\sum_{l=0}^j \binom{j+1}{l} S_l = (m+1)^{j+1}$

En efecto: $\sum_{l=0}^j \binom{j+1}{l} S_l = \sum_{l=0}^j \binom{j+1}{l} \sum_{k=0}^m k^l$ (Definición de S_l)

ingreso de $\binom{j+1}{l}$ a $\sum_{k=0}^m$

$$= \sum_{l=0}^j \sum_{k=0}^m \binom{j+1}{l} k^l = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^j \binom{j+1}{l} k^l \quad (\text{Intercambio de Sumas})$$

10

$$= \sum_{k=0}^m \left[\sum_{l=0}^{j+1} \binom{j+1}{l} k^l - \binom{j+1}{j+1} k^{j+1} \right] = \sum_{k=0}^m \left[(k+1)^{j+1} - k^{j+1} \right] \quad (\text{Telescópico})$$

2.0

Binomio

1.0

$$= (m+1)^{j+1} - 0^{j+1} = (m+1)^{j+1}$$

b) Probar que $S_j = \frac{(m+1)^{j+1} - \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j+1}{l} S_l}{j+1}$, usando (a)

En efecto, a partir de (a) $\sum_{l=0}^j \binom{j+1}{l} S_l = (m+1)^{j+1}$

1.0

$$\Leftrightarrow \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j+1}{l} S_l + \binom{j+1}{j} S_j = (m+1)^{j+1}$$

2.0

$$\Leftrightarrow \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j+1}{l} S_l + (j+1) S_j = (m+1)^{j+1} \Leftrightarrow \text{Despejando}$$

1.0

$$S_j = \frac{(m+1)^{j+1} - \sum_{l=0}^{j-1} \binom{j+1}{l} S_l}{j+1}$$

Pregunta Problema 2

a) Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$. Calcular $\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^j \left(k + \frac{2^j}{j}\right)$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^j \left(k + \frac{2^j}{j}\right) &= \sum_{j=1}^m \left[\sum_{k=1}^j k + \sum_{k=1}^j \frac{2^j}{j} \right] = \sum_{j=1}^m \left[\frac{j(j+1)}{2} + \frac{2^j}{j} \sum_{k=1}^j 1 \right] \\ \textcircled{1.5} \rightarrow &= \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{2}(j^2+j) + \frac{2^j}{j} j \right] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m (j^2+j) + \sum_{j=1}^m 2^j = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^m j^2 + \sum_{j=1}^m j \right] + \sum_{j=1}^m 2^j \end{aligned}$$

$$\textcircled{1.5} \rightarrow = \frac{1}{2} \left[\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} \right] + 2 \frac{1-2^{m+1}}{1-2}$$

$$\text{o lim} = \frac{m(m+1)(m+2)}{6} + 2^{m+1} - 2$$

b) Demuestra que el conjunto de todos los triángulos cuyos vértices son elementos de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, es numerable.

Se puede considerar el conjunto de todos los tríos de pares ordenados de racionales, en que cada par contiene las coordenadas de los vértices de un triángulo.

$$\text{Sea } T = \left\{ (x,y), (u,v), (r,s) \mid (x,y), (u,v), (r,s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \right\}$$

T es infinito: basta fijar, por ejemplo, $(x,y) = (0,0) \wedge (u,v) = (1,0)$

$\textcircled{10} \rightarrow$ en lo cual (r,s) recorre $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, infinito.

Por otro lado, $T \subseteq \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q}^6$ donde \mathbb{Q} es numerable y por lo tanto \mathbb{Q}^6 es numerable.

$\textcircled{20} \rightarrow$ Sigue que T es infinito y subconjunto de un numerable y por lo tanto numerable!